2 КИНЕМАТИКА. Нүкте және қатты дене кинематикасы

Теориялық механиканың кинематика бөлімінде денеге әсер ететін күштер есепке алынбаған жағдайдағы механикалық қозғалыс қарастырылады. Теориялық механиканың бұл бөлімінде денелер қозғалыстары, күштерге тәуелсіз, таза геометриялық тұрғыдан қарастырылады. Қаралатын негізгі мәселелер: а) дененің берілген қозғалысын математикалық формулаларды және графиктер мен кестелерді қолдана отырып сипаттау; б) осы қозғалысты сипаттайтын кинематикалық шамаларды табу. Кинематикаға арнайы енгізілген ұғымдар мен шамалар: нүкте, абсолют қатты дене, санақ жүйесі, траектория мен жол, орын ауыстыру, жылдамдық, үдеу, айналу бұрышы, бұрыштық жылдамдық, бұрыштық үдеу шамалары. Осы ұғымдарды және кинематикалық шамаларды пайдалана отырып, механикалық қозғалыстарын уақыт *t*-ға тәуелділіктерін өрнектейтін теңдеулерді құру – кинематиканың негізгі мақсатына жатады.

Тек ұзындық бірлігі L және уақыт бірлігі t мен өрнектелінетін шамаларды кинематикалық шамалар деп айтамыз.

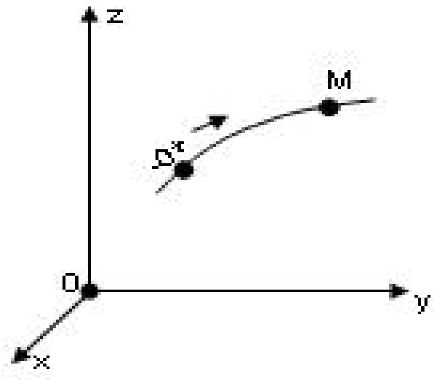
Қозғалыстағы дене уақыт өтуіне байланысты басқа денелерге қарағандағы кеңістіктегі орнын өзгертіп отырады, сондықтан оның кеңістіктегі орнын немесе қозғалысын шартты түрде қозғалмайды деп алынған , кез келген бір екінші қатты денемен салыстырып қарау арқылы ғана анықтауға болады. Берілген дененің қозғалысын салыстыру үшін таңдап алынған екінші дене санақ денесі деп аталады. Оны таңдау қарастырылып отырған есептің шешімін табу ыңғайына сәйкес орындалады. Таңдап алынған санақ денесіне координаттар жүйесі бекітіліп алынады.

2.1. Нүкте кинематикасы

2.1.1 Нүкте қозғалысының берілу тәсілдері

Кез келген уақытта санақ жүйесіне қарағанда нүкте орнын анықтайтын теңдеулер белгілі болса, нүкте қозғалысы берілген деп есептеледі. Кинематикада нүкте қозғалысы үш түрлі тәсілдермен беріледі:

- *табиғи*
- *координаталық*
- *векторлық*



2.1-сурет

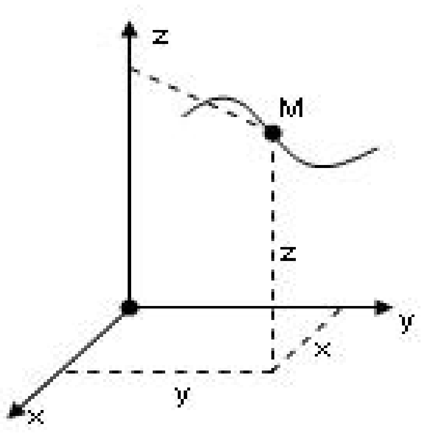
1. Табиғи тәсіл. Нүкте қозғалысының берілуінің үш тәсілінің бірі - табиғи тәсіл. Нүкте қозғалысының берілуінің табиғи тәсілінде нүктенің кез келген бір санақ жүйесіне қатысты траекториясы беріледі. Одан кейін, оның бойынан қандайда болсын бір нүкте O_1-ді доға ұзындығын есептеудің бастапқы нүктесі етіп алып, қашықтықты санаудың оң бағыты үшін мүмкін екі бағыттың кез келген бірі алынады. Сонда *M* нүктесінің орны $S=O_1M$ шамасымен анықталады.

А нүктенің траектория бойындағы орнын әрбір уақыт сәтінде де таба алуымыз үшін, доға ұзындығы $S=O_1M$ және уақыт t-ның әрбір мәніне сәйкес келетін S-тің мәнін беретін бір сарынды, үздіксіз уақыт функциясы берілуі керек.

$$S = f(t) \qquad (2.1)$$

Доға ұзындығы S пен уақыт t-ның арасындағы функциялық тәуелділік (2.1) нүктенің траектория бойымен қозғалуының заңы деп аталады.

2. Координаталық тәсіл. Координата жүйелерінің түрлері:



2.2-сурет

- тік бұрышты декарттық;
- цилиндрлік (полярлық);
- сфералық;
- және т.б.

Бізге абсолют қозғалмайтын декарттық координаталар өстер жүйесіне қатысты M нүктесінің қозғалысын қарастыру керек болсын. Егер осы нүктенің x,y,z уақыт t-ның үздіксіз бірмәнді функциялары болып келсе, яғни:

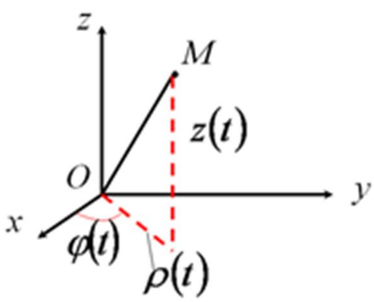
$$x = f(t), \quad y = f(t), \quad z = f(t) \qquad (2.3)$$

онда нүктенің әрбір уақыт сәтіндегі орны толық анықталады.

Сонымен, нүктенің орнын анықтаудың координаттар тәсілінде қандайда бір координаттар жүйесінде оның координаттары уақытқа тәуелді функция ретінде беріледі. *(2.3)-теңдеулер нүкте қозғалысының теңдеулері деп аталады*. Сонымен қатар, бұл теңдеулерге нүкте траекториясының параметрлік теңдеулері деп қарауға болады. Траектория теңдеуін анықтау үшін (2.3)–теңдеулерден параметр рөлінде тұрған t-ны аластау керек. Сонда траекторияның теңдеуін мынадай екі теңдеу жүйесі түрінде аламыз:

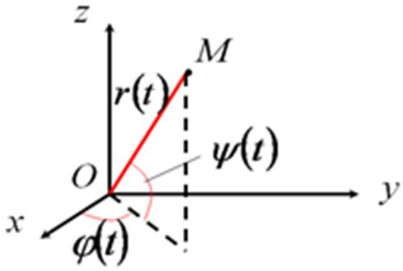
$$F_1(x,z) = 0, \; F_2(y,z) = 0 . \qquad (2.4)$$

Цилиндрлік координаталар жүйісінде нүкте қозғалысының теңдеулері:

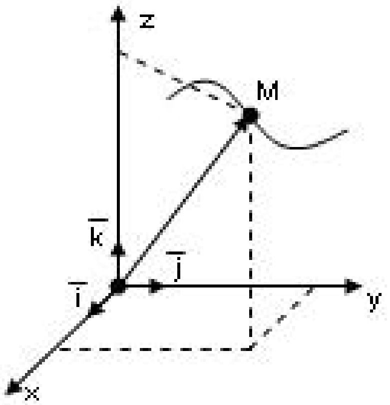


$$\boxed{\begin{cases} \varphi = \varphi(t) \\ \rho = \rho(t) \\ z = z(t) \end{cases}}$$

Сфералық координаталар жүйісінде нүкте қозғалысының теңдеулері:



$$\boxed{\begin{cases} r = r(t) \\ \varphi = \varphi(t) \\ \psi = \psi(t) \end{cases}}$$



2.4-сурет

3. Векторлық тәсіл. Бұл тәсілде *Oxyz* координаттар жүйесіне қатысты нүктенің орны $\bar{r} = \overline{OM}$ векторымен анықталады (2.4-сурет). Координаттар бас нүктесін және берілген *M* нүктесін қосатын вектор $\bar{r}$-ді нүктенің радиус – векторы деп атайды. Қозғалыс кезінде $\bar{r}$-өзінің модулін де, бағытын да өзгертеді. Демек, ол *t*-ның бір мәнді, үздіксіз, дифференциалданатын функциясы болып келеді. (2.5) өрнегі нүкте қозғалысының векторлық теңдеуі:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}(t)} \qquad (2.5)$$

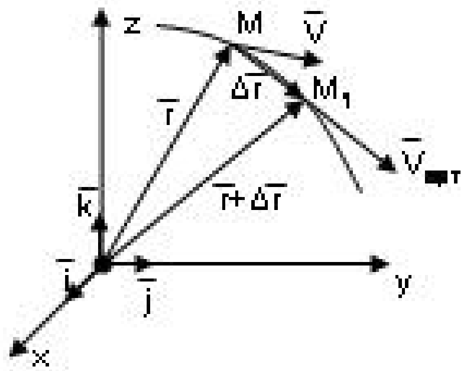
Декарт координата жүйесімен байланыс:

$$\boxed{\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

2.1.2. Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүкте жылдамдығын анықтау

Нүкте *M*-нің қозғалысы *Oxyz* координаттар жүйесіне мына векторлық теңдеумен анықталсын:

$$\bar{r} = \bar{r}(t).$$



2.5-сурет

M нүктесінің қандай да *t* уақытындағы орны $\bar{r} = \overline{OM}$ радиус векторымен, ал $t_1 = t + \Delta t$ уақыт мезгіліндегі орны $\bar{r}_1 = \overline{OM}_1$ радиус векторымен анықталсын (2.5-сурет). Траекторияның *M* және M_1 нүктелерін MM_1 векторымен қосайық.

Сонда векторлық үшбұрыш ΔOMM_1 -ден мынадай векторлық қосынды алуға болады: $\bar{r}$

$_1=\bar{r}+\Delta\bar{r}$ Осыдан $\Delta\bar{r}=\bar{r}_1-\bar{r}$ екенін анықтаймыз. *Радиус –вектор* $\bar{r}$*-дің Δt уақыт аралығындағы алған өсімшесі Δ*$\bar{r}$ *-ді М нүктесінің орын ауыстыруы дейміз.*

Радиус-вектор өсімшесі Δ$\bar{r}$ *- дің оған сәйкес уақыт өсімшесі Δt -ға қатынасы, Δt –уақыт аралығындағы нүктенің орташа жылдамдығы деп аталады*. Ол мына формуламен беріледі:

$$\bar{v}_{OPT}=\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Орташа жылдамдық векторы $\bar{v}_{\text{орт}}$ хорда MM_1 бойымен қозғалыс болатын жаққа қарай бағытталады (2.5-сурет).

Нүктенің берілген t уақыттағы жылдамдығы деп уақыт өсімшесі Δt-нің нөлге ұмтылған кездегі орташа жылдамдықтың ұмтылған шегін айтамыз.

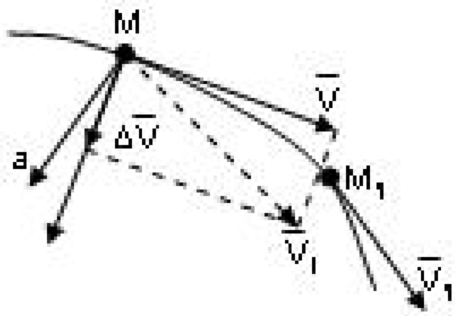
$$.\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta r}{\Delta t} \qquad (2.6)$$

(2.6)–формула лездік жылдамдық немесе берілген *t* уақытындағы жылдамдықты анықтайды. (2.6) теңдігінің оң жағындағы қатынастың шегі уақыт бойынша алынған радиус-вектордың туындысын береді. Осыны ескерсек (2.6) – теңдікті мына түрде жаза аламыз:

$$\bar{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (2.7)$$

Берілген сәттегі нүкте жылдамдығы деп, оның радиус–векторының уақыт бойынша алынған туындысына тең болып келген векторлық шама, $\bar{v}$*-ны айтамыз.*

2.1.3. Қозғалысы векторлық тәсілмен берілген нүктенің үдеуі



2.6-сурет

Нүктенің қозғалысы векторлық теңдеуімен берілген дейік, сонда нүктенің *Oxyz*–координаттық жүйедегі радиус-векторы $\bar{r}$ уақыт *t*–ның бірмәнді, үздіксіз дифференциалданатын функциясы ретінде анықталады:

$$\bar{r}=\bar{r}(t). \qquad (2.8)$$

(2.8)–теңдеу нүктенің жылдамдық векторы $\bar{v}$ -ның уақытқа тәуелді өзгеруін көрсететін, мынадай теңдеуді береді:

$$\bar{v}=\frac{d\bar{r}}{dt}. \qquad (2.9)$$

Нүктенің қозғалысы кезінде жылдамдық векторы өзінің шамасында, бағытында өзгертіп отырады. *Жылдамдықтың уақыт өтуіне байланысты өзгеруінің тездігін сипаттаушы физикалық шаманы үдеу деп атайды.* Осы шаманы анықтайтын t мезгілінде M нүктесінің жылдамдығы $\bar{v}$ болады дейік (2.6-сурет), ал уақыт $t_1=t+\Delta t$-ға, тең болған сәтте, ол $\bar{v}_1=\bar{v}+\Delta\bar{v}$ болсын. Осы Δt уақыты аралығындағы жылдамдық векторы $\bar{v}$-ның өсімшесі $\Delta\bar{v}$-ны геометриялық жолмен табу үшін, траекторияның M нүктесінде жылдамдықтар параллелограмын құрамыз. Осы параллелограмм диагоналін өрнектейтін қосындыдан $\Delta\bar{v}$-ны табамыз:

$$\bar{v}+\Delta\bar{v}=\bar{v}_1,\ \ \Delta\bar{v}=\bar{v}_1-\bar{v}\ . \qquad (2.10)$$

Жылдамдық өсімшесі $\Delta\bar{v}$-ның сәйкес уақыт өсімшесі Δt-ға қатынасын алайық:

$$\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}=\bar{a}_{ОРТ}\ , \qquad (2.11)$$

мұндағы $\bar{a}_{\text{орт}}$ векторын нүктенің Δt уақыт аралығындағы орташа үдеуі дейміз. Осы анықтамадан берілген уақыттағы, яғни лездік үдеудің анықтамасын алуға болады.

Нүктенің берілген уақыттағы үдеуі деп, Δt уақыт өсімшесі нөлге ұмтылғандағы орташа үдеудің ұмтылған шегін айтамыз:

$$\bar{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\bar{a}_{ОРТ}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t}\ , \qquad (2.12)$$

мұндағы $\Delta\bar{v}/\Delta t$ қатынасының $\Delta t\to 0$ кездегі шегі, $\bar{v}$ -векторының аргумент t бойынша алынған бірінші туындысы болып табылады және оны $d\bar{v}/dt$ деп белгілейміз осыны ескере отырып, (2.12) –теңдіктен мына түрдегі

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt} \qquad (2.13)$$

өрнек аламыз. Жылдамдық векторының (2.5.) өрнегін ескере отырып, (2.13)-ні былай да жаза аламыз:

$$\bar{a}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \qquad (2.14)$$

Сонымен, *берілген уақыт мезгіліндегі нүктенің үдеуі деп жылдамдық векторының уақыт бойынша алынған бірінші туындысына (2.13) немесе нүктенің радиус-векторының уақыт бойынша алынған екінші туындысына (2.14) тең болатын векторлық шаманы айтамыз.*

Лездік үдеу векторы $\bar{a}$, траекторияның M нүктесіндегі жанаспа жазықтығында жатады және M нүктесінен траекторияның ойыс (ішкі) жағына қарай бағытталады.

Траектория жазық қисық болса, онда оның барлық нүктесіндегі жанаспа жазықтық бірдей бір жазықтық болады. Ол қисық сызықтың өз жазықтығына дәл келеді.

2.1.4. Қозғалысы координаттық тәсілде берілген нүкте жылдамдығын анықтау

Нүктенің *Oxyz* санақ жүйесіндегі қозғалысы координаттық тәсілде берілген. Демек, нүктенің осы санақ жүйесіндегі координаттары *x, y, z* уақытқа тәуелді функциялар түрінде беріледі:

$$x = f(t), \quad y = f(t), \quad z = f(t). \tag{2.15}$$

Қозғалыс тендеулері (2.15) арқылы берілген М-нүктесінің жылдамдығын анықтауға қажетті формулаларды табуымыз керек. Осы мақсатпен жоғарыда көрсетілген

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \tag{2.16}$$

векторлық теңдеуіндегі $\bar{r} = \overline{OM}$ радиус-векторын оның *Oxyz* өстеріндегі құраушылары арқылы өрнектейік:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}\,. \tag{2.17}$$

(2.17) өрнегін (2.16) –теңдіктегі орнына қояйық:

$$\bar{v} = \frac{d(x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k})}{dt}. \tag{2.18}$$

Осыдан:

$$\bar{v} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}\,. \tag{2.19}$$

Енді жылдамдық векторы $\bar{v}$-ны үш құраушыға жіктеп, оны (2.19) теңдігінің сол жағына қоямыз:

$$v_x\bar{i} + v_y\bar{j} + v_z\bar{k} = \frac{dx}{dt}\bar{i} + \frac{dy}{dt}\bar{j} + \frac{dz}{dt}\bar{k}\,. \tag{2.20}$$

(2.20) тепе-теңдігіндегі өзара тәуелсіз $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ векторының алдындағы коэффициенттерді теңестіреміз:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}. \tag{2.21}$$

(2.21) формулалары нүкте жылдамдығы $\bar{v}$-ның координаттық өстердегі проекцияларын өрнектейді. Жылдамдық проекциялары (2.21) табылғаннан кейін вектордың өзі де толық табылады. Оның модулі мына формуламен анықталады:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\,. \tag{2.22}$$

Осыдан соң жылдамдық векторының бағыттаушы косинустарын есептей аламыз:

$$\cos(v,x)=\frac{v_x}{v},\ \ \cos(v,y)=\frac{v_y}{v},\ \ \cos(v,z)=\frac{v_z}{v}. \qquad (2.23)$$

2.1.5. Қозғалысы координаттық тәсілмен берілген нүктенің үдеуін анықтау

Қозғалмайтын *Oxyz* координаттар жүйесіндегі нүкте қозғалысы

$$x=f(t),\ z=f(t) \qquad (2.24)$$

теңдеулерімен анықталады дейік. Осы теңдеулер арқылы нүкте үдеуін қалай есептеуге болатынын көрейік. Нүкте үдеуі деп (2.13) не (2.14) векторлық теңдікпен берілген векторды айтамыз. (2.14) теңдіктің оң жағындағы радиус-вектор $\bar{r}$-ді координаттар өстеріне жіктеп жазуға болады:

$$\bar{r}=x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k}\,. \qquad (2.25)$$

(2.25)-тегі $\bar{r}$ векторының компоненттерін (2.14) теңдігіне қойып

$$\bar{a}=\frac{d^2(x\bar{i}+y\bar{j}+z\bar{k})}{dt^2}. \qquad (2.26)$$

(2.26) теңдігінің оң жағындағы туындыны есептеп шықсақ, мына теңдікке келеміз:

$$\bar{a}=\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\bar{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}\,. \qquad (2.27)$$

Енді үдеу векторы $\bar{a}$-ны үш құраушыға жіктеп оны (2.27) теңдігінің сол жағына қоямыз:

$$a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}=\frac{d^2x}{dt^2}\bar{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\bar{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\bar{k}\,. \qquad (2.28)$$

(2.28) теңдігі орынды болуы үшін, бұл теңдіктің екі жағында тұрған өзара тәуелсіз $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ бірлік векторларының әрбіреуінің араларындағы коэффициенттері бірі-біріне тең болуы керек:

$$a_x=\frac{d^2x}{dt^2},\quad a_y=\frac{d^2y}{dt^2},\quad a_z=\frac{d^2z}{dt^2}. \qquad (2.29)$$

Үдеу модулі мына формуламен анықталады:

$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\,. \qquad (2.30)$$

Үдеу векторының кеңістіктегі бағыты оның бағыттаушы косинустарымен анықталады:

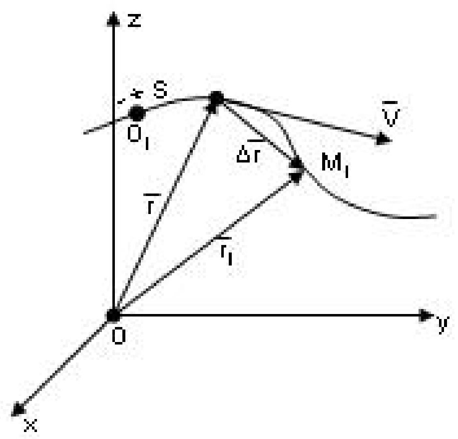
$$\cos(a,x)=\frac{a_x}{a},\ \ \cos(a,y)=\frac{a_y}{a},\ \ \cos(a,z)=\frac{a_z}{a}. \qquad (2.31)$$

2.1.6. Қозғалысы табиғи тәсілмен берілген нүктенің жылдамдығын анықтау

Нүкте М-нің қозғалысы координаттар жүйесінде табиғи тәсілде берілген дейік. Демек, нүктенің траекториясы АВ көрсетілген (2.8-сурет). Осымен қатар, доғалық қашықтық $S = \overset{\cup}{OM}$ уақытқа тәуелді функция ретінде берілген $S = f(t)$ Енді нүктенің жылдамдығын есептеу жолын көрсетейік. Ол үшін

жылдамдық векторының анықтамасы (2.8) –ді берілген және O_1 санақ нүктесі, қашықтықты есептеудің оң бағытты пайдаланамыз:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$



2.8 - сурет

мұндағы $\bar{r}$ нүктенің радиус векторы. (2.8) –дің екі жағынан модуль алайық:

$$\left|\bar{v}\right| = \left|\frac{d\bar{r}}{dt}\right| = \frac{d\left|\bar{r}\right|}{dt}. \qquad (2.32)$$

Бұл жерде уақыт дифференциалы dt оң таңбалы шама екені ескеріледі. Енді радиус векторың дифференциалының модуліне тең болатынын пайдаланайық:

$$\left|d\bar{r}\right| = \left|dS\right|. \qquad (2.33)$$

(2.32) теңдегі арқылы (2.33) өрнегінен мынадай формуланы аламыз:

$$\tilde{v} = \frac{dS}{dt}. \qquad (2.34)$$

Доғалық координаттың уақыт бойынша алынған туындысының таңбасы “+”, не “-” болуы мүмкін. Егер қозғалыс доғаны есептеудің оң бағытында орындалса, онда $dS/dt > 0$ болатындықтан $v = dS/dt > 0$, ал қозғалыс доғалық қашықтықты есептеу бағытына қарсы бағытта орындалатын жағдайда $dS/dt < 0$. Траекторияның M нүктесінде жүргізілген жанаманың бірлік векторын $\bar{\tau}$ деп белгілейік. Бұл $\bar{\tau}$ векторы S доғалық қашықтықты есептеудің оң бағытына сәйкес бағытталатынын ескерсек, онда (2.34)-ті векторлық түрде жаза аламыз:

$$\bar{v} = v\bar{\tau}.$$

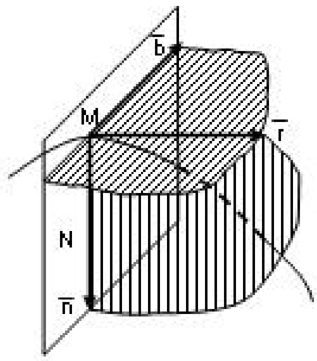
Сонымен, нүкте қозғалысы табиғи тәсілде берілген болса, онда оның жылдамдығының модулі де, бағыты да толық анықталады.

2.1.7. Табиғи үш жақ. Табиғи өстер. Үдеу векторының жанама және нормаль құраушылары

1. Табиғи үш жақ. Табиғи өстер. *Траекторияның бір–біріне шексіз жақын орналасқан үш нүктесі арқылы өтетін жазықтық, оның ортаңғы нүктесіне жүргізілген, жанаспа жазықтық деп аталады.*

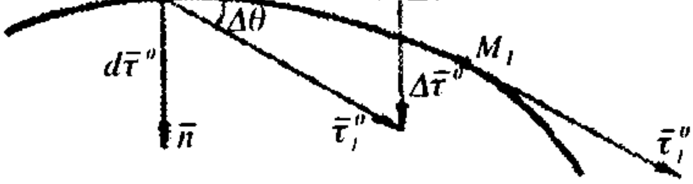
Жанамаға перпендикуляр, М нүктесі арқылы өтетін, N- жазықтығы траекторияның осы нүктедегі нормаль жазықтығы деп аталады.

Траекторияның М нүктесіндегі жанама арқылы өтетін нормаль және жанаспа жазықтықтарға перпендикуляр үшінші жазықтық траекторияның сол нүктедегі түзілеуші жазықтығы деп аталады (2.9-сурет). Жанаспа жазықтықта жатқан нормаль, қисықтың *М* нүктесіндегі бас нормаль деп, ал жанаспа жазықтыққа осы нүктеде жүргізілген перпендикуляр, бинормаль деп аталады. Жанаманың оң бағыты ($\bar{\tau}$ бірлік векторы) қозғалыспен бағыттас келеді. Бас нормальдың оң бағыты ($\bar{n}$ бірлік векторы) траекторияның ойыс жағына қарай бағытталады. Бинормальдың оң бағыты ($\bar{b}$ бірлік векторы) $\bar{\tau}$ және $\bar{n}$ векторларымен оң координаттар жүйесін құрайтындай етіп алынады. *Бас нүктесі М болатын бұл координаттар жүйесі* $M\bar{\tau}\,\bar{n}\,\bar{b}$ *табиғи координаттар жүйесі деп, немес табиғи үшжақ деп аталады* Координаттар жазықтары екі-екіден алынған бірлік векторларымен анықталады. $(\bar{\tau},\bar{n})$ –жанаспа жазықтық, $(\bar{n},\bar{b})$ - нормаль жазықтық, $(\bar{b},\bar{\tau})$ – түзулеуші жазықтық.



2.9-сурет

2. Қисық сызық қисықтығы. Нүктенің траекториясын жалпы жағдайда кеңістіктегі қисық сызық деп санаймыз. Нүкте траекториясының *М* нүктесі берілсін. Траекторияның осы нүктесінде



2.10-сурет

және оған жақын орналасқан екінші нүктесі M_1 арқылы $\bar{\tau}$ және $\bar{\tau}_1$ жанама бірлік векторларын жүргізейік (2.10-сурет). M_1 нүктесі берілген *М* нүктесінен ΔS қашықтықта болсын, $\bar{\tau}_1$ векторын *М* нүктесіне параллель көшірейік. *М* нүктесіндегі $\bar{\tau}$ және $\bar{\tau}_1$ екі бірлік векторлар арасындағы бұрышты, $\Delta\theta$ деп белгілейік. Бұл бұрыштың ΔS доға ұзындығына қатынасын алайық:

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta S} = k_{орт}\,. \tag{2.35}$$

(2.35) қатынасын траекторияның MM_1 доғасының орташа қисықтығы дейміз. Осы орташа қисықтық ұғымын пайдалана отырып, қисықтық яғни траекторияның берілген нүктедегі қисықтығы деген ұғым енгізе аламыз.

Қисықтың берілген *М* нүктесіндегі қисықтығы деп орташа қисықтықтың ΔS нөлге ұмтылғандағы шегіне тең шаманы айтамыз:

$$\lim_{\Delta S \to 0} k_{орт} = k\,. \tag{2.36}$$

Орташа қисықтық өрнегі (2.35) арқылы (2.36) теңдігін мына түрде жазайық:

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta S} = k\,. \tag{2.37}$$

(2.37)-теңдіктің сол жағындағы қатынастың алымының және бөлімінің де шекті мәндерін анықтайық.

ΔS нөлге ұмтылғандағы немесе M_1 нүктесінің траектория бойымен берілген *М* нүктесіне ұмтылғандағы $\Delta\theta$ бұрыштың шекті мәнін $d\theta$ деп белгілеп, бұл бұрышты сыбайластық бұрыш деп атаймыз.

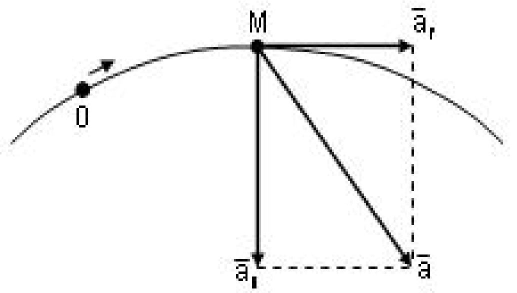
ΔS -тің M_1 нүктесінің траектория бойымен *М*-ге ұмтылғандағы шегі dS доға элементіне тең. Осы түсіндірмелерді пайдалана отырып, (2.37)-анықтаманы былай жазамыз:

$$k = \frac{d\theta}{dS}. \tag{2.38}$$

(2.38)-формула қисық сызықтың берілген *М* нүктесіндегі қисықтығын анықтайды. Ол былай айтылады. Траекторияның берілген нүктесіндегі қисықтығы элементар сыбайластық бұрыштың доға элементіне қатынасына тең шама.

3. Қисықтың берілген нүктедегі қисықтық радиусы. Қисықтың *М* нүктесі берілсін, оның осы *М* нүктесіндегі қисықтық радиусы деп осы нүктедегі *k* –ға кері шаманы айтамыз. Қисықтың берілген *М* нүктесіндегі қисықтық радиусы ρ десек, онда ол осы айтылған анықтама бойынша мынаған тең:

$$\rho = \frac{1}{k}. \tag{2.39}$$



2.11-сурет

4. Үдеу векторының жанама және нормаль құраушылары. Кеңістікте бойымен *М* нүктесі қозғалатын қисық берілсін, нүктенің траектория бойындағы *М* орнына $S = \overset{\cup}{OM}$ доғасы сәйкес келеді. Бұл доғаның *t* –уақытқа тәуелділігі берілсін:

$$S = f(t) \tag{2.40}$$

Қозғалыс заңы (2.40) теңдігі түрінде берілген M нүктесінің үдеуінің векторы $\bar{a}$ –ны табиғи өстер бағыттарындағы құраушыларға жіктеу керек. Осы мақсатты көздеп жылдамдық векторы $\bar{v}$ -ны жанама бірлік векторы $\bar{\tau}$ арқылы өрнектейік:

$$\bar{v} = v\bar{\tau} \qquad (2.41)$$

мұндағы v, жылдамдық векторы $\bar{v}$ -ның $\bar{\tau}$ бағытындағы проекциясы $v_r=v$. Егер нүкте қозғалысы доға S-тың ұзындығы есептеудің оң бағытына бағыттас орындалса, онда $v_r=v$ ол егер оның қозғалысы S- ті есептеудің оң бағытына қарсы бағытта өтетін болса , онда $v_r= -v$.

Екі жағынан уақыт бойынша туынды алу арқылы (2.41)-ді мына түрге келтіреміз:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v\frac{d\bar{\tau}}{dt} \qquad (2.42)$$

Бірлік векторы $\bar{\tau}$ -дың дифференциалы, мынаған тең екені белгілі:

$$d\bar{\tau} = d\theta \cdot \bar{n} \qquad (2.43)$$

Осы (2.43)–теңдікте әрі қарай түрлендірейік:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\bar{n} = \frac{d\theta}{dS}\frac{dS}{dt}\bar{n} = \frac{v}{\rho}\bar{n} \qquad (2.44)$$

мұндағы ρ траекторияның M нүктесіндегі қисықтық радиусы. Соңғы (2.44) теңдікті ескерсек (2.42)–теңдіктен үдеу векторының мынадай жіктелуін аламыз:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\bar{n} \qquad (2.45)$$

Бұдан, үдеудің жанама және бас нормаль бағыттары бойынша (2.11-сурет), тек екі құраушыға жіктелетінін көреміз. Демек, үдеу векторы жанаспа жазықтықта жатады, сондықтан да оның бинормальдағы құраушысы нөлге тең болады деген қорытындыға келеміз. Олай болса, үдеудің табиғи үшжақ өстеріндегі құраушылары мына түрде беріледі:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0 \qquad (2.46)$$

Үдеу векторының, $\bar{\tau}$ бағытындағы құраушысы $\bar{a}_\tau=\bar{\tau}\, dv/dt$ жанама (тангенцияль) үдеу, ал оның $\bar{n}$ -бағытындағы құраушысы $\bar{a}_n=\bar{n}\, v^2/\rho$ нормаль үдеу болады, (2.42) –теңдікті қысқаша мына түрде жазуға да болады (2.11-сурет)

$$\bar{a} = a_\tau\bar{\tau} + a_n\bar{n} \qquad (2.47)$$

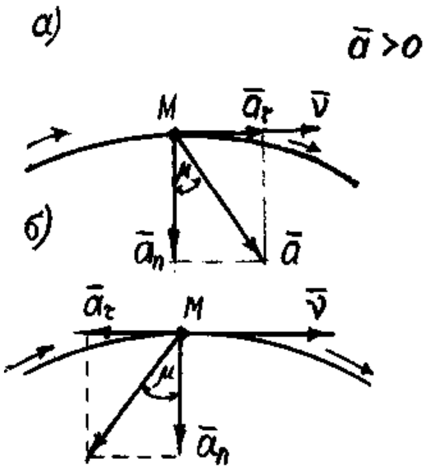
Оның модулі:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2} \qquad (2.48)$$

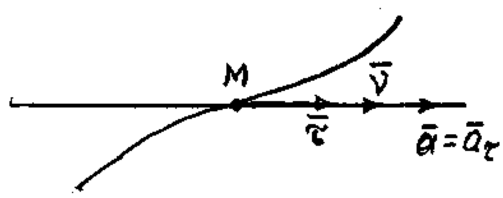
Жанама үдеу жылдамдықтың шама жағынан өзгеруін сипаттайды, өйткені ол жылдамдықтың модулінен уақыт бойынша алынған бірінші туындыға тең. Олай болса, нормаль үдеу жылдамдықтың бағытының өзгеруін сипаттауға тиіс. Нормаль үдеудің шамасы әруақытта оң сан болғандықтан, толық $\bar{a}$ үдеу траекторияның қисықтық центріне қарай бағытталғандықтан, оны центрге тартқыш үдеу деп те атайды. Толық үдеудің бағыты, оның бас нормальдың оң бағытымен жасайтын, μ-бұрышымен анықталады (2.11-сурет).

$$tg\mu = \frac{a_\tau}{a_n} \tag{2.49}$$

Осы формуладан, жанама үдеу $\bar{a}_\tau$-дың таңбасына қарап, яғни жылдамдық модулі v-ның өсуіне не кемуіне байланысты, толық



2.12-сурет



2.13-сурет

үдеуідің бас нормальдан қозғалыстың бағытына қарай, не оған қарсы бағытқа ауытқитынын көтеміз. Егер $a_\tau > 0$ (жылдамдықтың шамасы уақыт өткен сайын өсіп отыратын) болса, онда жанама үдеу $\bar{a}_\tau$ де қозғалыстың бағытына қарай бағытталады. Мұндай қозғалыс үдемелі қозғалыс деп аталады (2.12-сурет). Егер $a_\tau \neq 0$ болса, онда қозғалыс қисық сызықты қозғалыс, ал $a_n = 0(\rho = \infty)$ болса, онда ол түзу сызықты қозғалыс қозғалыс болады. Тек жеке уақыт кезеңінде ғана $a_n = 0$ болса, онда сол сәтте қозғалушы нүкте траекторияның кері иілу нүктесінде (2.13-сурет) болғаны, не сол сәтте нүктенің жылдамдығы нөлге тең $(v = 0)$ болғаны.

Егер $a_\tau < 0$ (жылдамдық шамасы қозғалыс кезінде кеміп отыратын) болса, $\bar{a}_\tau$ және $\bar{a}$ векторлары қозғалысқа қарсы бағытталады, ал қозғалыс кемімелі қозғалыс деп аталады (2.12,б-сурет).

Егер барлық уақытта да $a_\tau = 0$ жылдамдықтың шамасы тұрақты, яғни $v = const$ болса, қозғалыс бірқалыпты қозғалыс деп аталады. Егер тек қана жеке уақыт кезеңі үшін $a_\tau = 0$ болса, онда алгебралық жылдамдық өзінің экстремалды мәнін қабылдағаны. Ал барлық уақытта да $a_\tau = a_n = 0$ болса, онда нүкте бірқалыпты түзу сызықты қозғалыста болғаны.

2.1.8. Нүкте қозғалысының кейбір жеке түрлері

Траекторияның түріне қарай нүкте қозғалысы екі топқа бөлінеді. Қозғалыс кезінде түзу сызық сызатын нүктені түзу сызықты қозғалыс жасайды дейміз, траекториясы қисық сызық түрінде болып келетін нүктені екінші топқа жатқызамыз. Нүкте жылдамдығының өзгеруіне қарап бұл екі топтағы нүкте қозғалыстарының әрқайсысын әр түрге бөліп атаймыз. Алдымен нүктенің түзу сызықты қозғалысына жеке тоқтап өтейік.

1. Түзу сызықты бірқалыпты қозғалыс. Түзудің қисықтық радиусы $\rho = \infty$ болғандықтан түзу сызықты қозғалыстағы нүктенің нормаль үдеуі нөлге тең болады да, оның толық үдеуі жанама құраушысына тең болады:

$$a = a_\tau = \frac{dv}{dt}. \qquad (2.50)$$

Нүктенің жылдамдығы тұрақты, түзу сызықты қозғалысы – *түзу сызықты бірқалыпты қозғалыс* деп аталады. Мұндай қозғалыстың (2.50) – формула бойынша, үдеуі нөлге тең болады да, қозғалыс кезіндегі уақыттардың бәрінде жылдамдық векторы модулін өзгертпей сақтайды.

Түзу сызықты, бірқалыпты қозғалысты сипаттайтын формулалар мынадай:

$$a = 0,\ v = const,\ s = s_0 + vt. \qquad (2.51)$$

2. Түзу сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалыс. Үдеуі тұрақты нүктенің түзу сызықты қозғалысы - *бірқалыпты айнымалы қозғалысы* деп аталады, мұндай қозғалысты сипаттайтын формулалар элементар физикадан белгілі:

$$a = const,\ v = v_0 + at,\ s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2. \qquad (2.52)$$

3. Қисық сызықты бірқалыпты қозғалыс. Нүктенің қисық сызықты қозғалысында $v = const$ болса, онда ол *бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс* деп аталады. Демек, бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс кезінде нүктенің жанама үдеуі нөлге тең болады да, толық үдеуі өзінің нормаль құраушысына тең болып келеді. Қисық сызықты бірқалыпты қозғалысты сипаттайтын формулалар мына түрде жазылады:

$$v = const,\ a_\tau = 0,\ a = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (2.53)$$

Нүкте жылдамдығын өрнектейтін теңдеуді интегралдау арқылы бірқалыпты бірқалыпты қисық сызықты қозғалыс заңын табамыз:

$$s = s_0 + v_0 t. \qquad (2.54)$$

4. Қисық сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалыс. Нүктенің жанама үдеуі қозғалыс кезінде үнемі тұрақты, яғни

$$a_\tau = const\,, \qquad (2.50)$$

Болса, онда қисық сызықты қозғалыс *бірқалыпты айнымалы қозғалыс* деп аталады.Мына теңдікті түрлендіре отырып оны мына түрде жазайық

$$dv = a_\tau dt\,. \qquad (2.55)$$

Осы теңдеуді интегралдау арқылы қозғалыс жылдамдығының өзгеру заңын табамыз:

$$v = a_\tau t + v_0\,, \qquad (2.56)$$

мұндағы v_0 нүктенің $t_0 = 0$ болған кездегі бастапқы жылдамдығы. Қисық сызықты бірқалыпты айнымалы қозғалыс заңын

$$ds = (a_\tau t + v_0)dt\,. \qquad (2.57)$$

теңдеуін интегралдау арқылы мына түрде аламыз:

$$s = \frac{1}{2}a_\tau t^2 + v_0 t + s_0\,, \qquad (2.58)$$

мұндағы s_0 – бастапқы қашықтық.

4. Қисық сызықты қозғалыстың жалпы жағдайы. Үдеу векторы жылдамдық векторының өзгеру тездігін анықтайды. Ол жалпы жағдайда жанама және нормаль құраушыларға жіктеледі. Жанама үдеу жылдамдық векторының сан мәнінің өзгеруін, ал нормаль үдеу жылдамдық бағытының өзгеруін сипаттайды. Жалпы жағдайда, жылдамдықтың өзгеруі толығынан қарастырылатындықтан $a_\tau \neq 0$, $a_n \neq 0$, болып келеді.

Жалпы жағдайдағы қисық сызықты қозғалыс үдемелі және кемімелі деген екі түрге бөлінеді. Үдемелі қозғалыс кезінде a_τ және v_τ шамаларының таңбалары бірдей, ал кемімелі қозғалыс кезінде бұлардың таңбалары қарама-қарсы болып келеді. Басқаша айтқанда, үдемелі қозғалыс кезінде жанама үдеу векторы жылдамдық векторымен бірдей бір жаққа қарай бағытталады, ал кемімелі қозғалыс кезінде ол жылдамдық векторына қарама-қарсы бағытта болады. $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$ оң шама болғандықтан нормаль үдеу бас нормальмен бірдей бағытталады. Нормаль үдеу траекторияның қисықтық центріне қарай бағытталуына байланысты, ол кейде центрге ұмтылғыш үдеу деп те аталынады. Осыдан бұрын айтылған үдеу векторының үнемі траекторияның ойыс жағына қарай бағытталатындығын, нормаль үдеу туралы берілген осы түсінік, оны айқындай түседі.